تحلیل دینامیکی حالت گذرای دوبعدی شبه‌کریستال‌های با ساختار ده‌وجهی تحت بارگذاری به‌صورت شوک بااستفاده از روش بدون مش اختلاف محدود تعمیم‌یافته*

سیدمحمود حسینی[۱]

چکیده در این مقاله، تحلیل دینامیکی حالت گذرا بااستفاده از روش بدون مش اختلاف محدود تعمیم‌یافته (The meshless generalized finite difference method) در شبه‌کریستال‌های با ساختار ده‌وجهی (Decagonal quasicrystals) انجام شده‌است. مطالعه برروی تغییرات حالت گذرای تغییرمکان‌های فنونی و فیزنی در این نوع از شبه‌کریستال‌ها که تحت تأثیر بارگذاری به‌صورت شوک مکانیکی می‌باشند، ازجمله اهداف این پژوهش می‌باشد. همچنین توسعهٔ کاربرد روش بدون مش بیان‌شده برای حل دینامیکی مواد شبه‌کریستال را با درنظر گرفتن کوپلینگ بین میدان‌های تغییرمکان‌های فنونی (Phonon displacement) و فیزنی (Phason displacement) از دیگر اهداف این مقاله می‌توان برشمرد. در معادلات حاکم بر مسئلهٔ ارائه‌شده در این مقاله، برهمکنش بین تغییرمکان‌های فنونی و فیزنی با درنظر گرفتن کوپلینگ بین این تغییرمکان‌ها با اعمال ضریب کوپلینگ لحاظ شده‌است، که این مورد باعث به‌دست آمدن معادلات تعادل دینامیکی به‌صورت دسته معادلات دیفرانسیل جزئی کوپل، شده‌است. برای به‌دست آوردن رفتار حالت گذرای تغییرمکان‌های فنونی و فیزنی، ناحیه‌ای مستطیلی و دوبعدی از جنس شبه‌کریستال با ساختار ده‌وجهی (AL-Ni-Co) درنظر گرفته شده‌است، به‌طوری‌که یکی از وجوه آن تحت تأثیر بارگذاری شوک اعمال‌شده بر میدان تغییرمکان‌های فنونی می‌باشد. باتوجه به وجود کوپلینگ بین میدان‌های تغییرمکان، تحریک ایجادشده در میدان تغییرمکان فنونی باعث بروز آشفتگی و تغییرات در میدان تغییرمکان فیزنی نیز می‌شود. برای حل معادلات حاکم بر مسئله کلیهٔ روابط استخراج‌شده بااستفاده از تبدیل لاپلاس به محیط لاپلاس منتقل شده و پس از حل معادلات بااستفاده از روش بدون مش اختلاف محدود تعمیم‌یافته، کلیهٔ پاسخ‌های استخراج‌شده بااستفاده از روش معکوس لاپلاس به حوزهٔ زمان انتقال داده شده‌اند. میزان اثرگذاری هر یک از میدان‌های تغییرمکان بر یکدیگر، تأثیر پارامتر کوپلینگ و نیز ضریب میرایی میدان تغییرمکان فیزنی بر رفتارهای دینامیکی حالت گذرای تغییرمکان‌ها مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

واژه‌های کلیدی تحلیل دینامیکی حالت گذرا، روش بدون مش، روش اختلاف محدود تعمیم‌یافته، مواد شبه‌کریستال، تغییرمکان فنونی، تغییرمکان فیزنی.

Two-dimensional Transient Dynamic Analysis of Decagonal Quasicrystals subjected to Shock Loading using Meshless Generalized Finite Difference (GFD) Method

S.M. Hosseini

Abstract *In this article, the transient dynamic analysis of decagonal quasicrystal (QC) is carried out using the meshless generalized finite difference (GFD) method. The transient behaviors of phonon and phason displacements in these types of QCs, when they are subjected to mechanical shock loading are studied. Also, the meshless GFD method is developed to solve the dynamic problems of QCs, considering coupling between phonon and phason displacements. The governing equations of the problem are obtained in the coupled system of PDEs by applying the coupling coefficient in the governing equations to simulate the interaction between phonon and phason displacements. A 2D rectangular domain made from decagonal (Al-Ni-Co) QCs is assumed for the problem to show the transient behaviors of phonon and phason displacements, when one side of 2D domain is excited by phonon displacement shock loading. Based on the coupling between phonon and phason displacements, any disturbance in phonon field causes some variations in phason field. To study the dynamic behaviors of phonon and phason fields, the coupled governing equations are transferred to Laplace domain. After analysis the problem by GFD method, the obtained results in Laplace domain are transferred to time domain using the Laplace inversion technique. The interactions between phonon and phason fields are studied in details. Also, the effects of coupling parameter and the phason friction coefficient on the dynamic and transient behaviors of phonon and phason displacement fields are obtained and discussed in details.*

Key Words Transient dynamic analysis; Meshless method; Generalized finite difference (GFD) method; Quasicrystals; Phonon displacement; Phason displacement.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۶/۸/۷ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۱۲/۱۲ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v30i1.68345

(۱) استاد، گروه مهندسی صنایع، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد. sm_hosseini@um.ac.ir

مقدمه

در سال ۱۹۸٤ میلادی، شختمن (شکتمن) و همکاران [1] نوع جدیدی از مواد کریستالی را کشف نمودند که چون خواص آن با کریستال‌های شناخته‌شده متفاوت بود، این مواد را شبه‌کریستال نامیدند. مواد شبه‌کریستال درمقایسه با مواد کریستال متفاوت هستند و علاوه‌بر وجود تفاوت در خواص، ساختار آنها نیز متفاوت می‌باشد. در شبه‌کریستال‌ها دو میدان تغییرمکان مجزا وجود دارد که به آنها میدان تغییرمکان فنونی و فیزنی اطلاق می‌گردد. این دو میدان تغییرمکان دارای برهم‌کنش هستند به‌طوری‌که ایجاد تغییرات یا آشفتگی در یکی از این میدان‌ها باعث بروز تغییر در میدان دیگر می‌شود. به‌عبارت دیگر تغییرمکان‌های فنونی و فیزنی به یکدیگر کوپل هستند و همین موضوع باعث می‌شود تا معادلات حاکم و روابط ساختاری تحت تأثیر قرار بگیرند؛ لذا معادلات دینامیکی ماکروسکوپی حاکم بر این شبه‌کریستال‌ها می‌بایست با درنظر گرفتن کوپلینگ بین تغییرمکان‌های فنونی و فیزنی استخراج شود که این مورد با اعمال ضرایب کوپلینگ بین این میدان‌ها حاصل می‌شود. تئوری‌ها و مدل‌های مختلفی برای شبیه‌سازی رفتار دینامیکی شبه‌کریستال‌ها با درنظر گرفتن خواص این مواد و وجود دو میدان تغییرمکان فنونی و فیزنی تاکنون ارائه شده‌است که درادامه به برخی از آنها اشاره خواهد شد.

فان و می [2]، شی [3] و فان [4] مدلی براساس معادلهٔ حرکت موج برای تحلیل‌های الاستودینامیک مواد شبه‌کریستال ارائه نمودند. همچنین مدل دیگری وجود دارد که براساس روابط و اصول الاستوهیدرودینامیک استخراج شده‌است [5, 6]. در تحلیل‌های دینامیکی مواد شبه‌کریستال از مدل‌های مذکور (مدل مبتنی بر حرکت موج و مدل مبتنی بر روابط الاستوهیدرودینامیک) استفادهٔ زیادی شده‌است که درادامه برخی از مهم‌ترین پژوهش‌های صورت‌گرفته مورد بررسی قرار می‌گیرند. راچل و لرمن [7] راه‌حلی تحلیلی به‌منظور تحلیل گسترش موج در مواد شبه‌کریستالی با ساختار بیست‌وجهی ارائه نمودند. آنها همچنین در پژوهشی دیگر [8] مدلی برای تحلیل‌های الاستودینامیک مواد شبه‌کریستالی ارائه نمودند که ترکیبی از دو مدل مبتنی بر حرکت موج و الاستوهیدرودینامیک بود. بااستفاده از مدل ارائه‌شده توسط راچل و لرمن، کازینکینا و همکاران [9] توانستند تحلیل دینامیکی شبه‌کریستال‌های با ساختار بیست‌وجهی را با درنظر گرفتن اثرات مختلف آسیب سطحی توسعه دهند. استفاده از مدلی که در آن گسترش موج و پدیدهٔ نفوذ درنظر گرفته شده‌است، گسترش و رشد ترک در یک تیر یک سر گیردار دوبل ساخته‌شده از شبه‌کریستالی با ساختار ده‌وجهی (Al-Ni-Co) توسط وانگ و فان [10] مورد بررسی قرار گرفته‌است. در سال ۲۰۱٤ میلادی، مدل دیگری برای شبیه‌سازی رفتار دینامیکی مواد شبه‌کریستال توسط آگیاسوفیتو و لازار [11] ارائه شد که به مدل موجی- تلگرافی شهرت دارد. در شبیه‌سازی رفتار دینامیکی میدان تغییرمکان فیزن فرض شده‌است که در معادلات تعادل دینامیکی هم شتاب و هم سرعت (منظور کردن میرایی) وجود دارد و برای بیان رفتار دینامیکی تغییرمکان فیزن معادلهٔ دیفرانسیل جزئی به سبک معادلهٔ تلگراف می‌بایست استفاده شود. باتوجه به استفاده از معادلهٔ موج برای بیان رفتار تغییرمکان‌های فنونی و معادلهٔ تلگراف برای بیان رفتار دینامیکی تغییرمکان‌های فیزنی، به این مدل موجی- تلگرافی اطلاق می‌شود. پس به‌طور کلی درخصوص مدل‌های ارائه‌شده برای تحلیل‌های دینامیکی مواد شبه‌کریستال، سه مدل اصلی وجود دارد که عبارتند از: الف) مدل موجی (هارمونیک)، ب) مدل الاستوهیدرودینامیک و ج) مدل موجی- تلگرافی. در مدل موجی معادلات حرکت میدان‌های فنونی و فیزنی هر دو به‌شکل معادلهٔ موج است و به‌عبارت دیگر دارای ترم شتاب در

معـادلات مـی‌باشـند. در مـدل الاسـتوهیدرودینامیک، معادلهٔ حرکت میدان فنونی به‌صورت معادلهٔ موج دارای ترم شتاب است ولی معادلهٔ حرکت میدان فیزنـی فقـط دارای ترم سرعت (میرایی) می‌باشد. در مـدل مـوجی- تلگرافی معادلهٔ حرکت میدان فنونی به‌صـورت معادلـهٔ موج است ولی معادلهٔ حرکت میدان فیزنی علاوه‌بر ترم شتاب دارای ترم سرعت نیز میباشد. در همهٔ مدل‌هـای ذکرشده در فوق، معادلات حرکت به‌صورت دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی کوپـل‌شـده اسـت. دسـتگاه معـادلات دیفرانسـیل کوپـل را مـی‌تـوان بااسـتفاده از روش‌های تحلیلی و یا عددی حل نمود. بـدیهی اسـت که باتوجه به وجود بـرهـم‌کـنش بـین تغییرمکـان‌هـای فنونی و فیزنی، ارائهٔ راه‌حل‌های تحلیلـی بـرای مسـائل دینامیکی و به‌خصوص بارگذاری‌های به‌صورت شـوک از پیچیـدگی برخـوردار اسـت و بیشـتر بـرای مسـائل یک‌بعدی و یا با فرضیات ساده‌کننده ارائه شده‌اسـت. از این دست راه‌حـل‌هـای تحلیلـی مـی‌تـوان بـه راه‌حـل ارائه‌شده توسط وانگ و همکاران [12] اشاره نمود کـه برای تحلیل شبه‌کریسـتال‌هـای یـک‌بعـدی بـا سـاختار شش‌وجهی و دوبعدی بـا سـاختار هشـت‌وجهـی و بـا درنظر گرفتن آسیب در ماده ارائه شده‌اسـت. همچنـین لی و فان [13] راه‌حـل تحلیلـی دیگـری بـرای تحلیـل شبه‌کریستال‌های دارای ترک و نیز بحـث تمرکـز تـنش در نوک ترک را ارائه نموده‌اند.

همان‌طـور کـه ذکـر شـد، در اکثـر پـژوهش‌هـای صورت گرفته برروی تحلیل‌های استاتیکی و دینـامیکی مواد شبه‌کریسـتال، از روش‌هـای عـددی بهـره گرفتـه شـده‌اسـت کـه برخـی از ایـن پـژوهش‌هـا در مراجـع [14-18] قابـل مشـاهده مـی‌باشـد. روش‌هـای عـددی استفاده‌شده در اکثر پژوهش‌هـا مبتنـی بـر روش المـان محدود و یا روش‌های بدون مش ازقبیـل روش بـدون مش محلی پتروف- گلرکین بوده‌است. به‌عنـوان نمونـه نویسندهٔ مقالهٔ پیش‌رو به‌همـراه همکـاران [19] تجربـهٔ موفقی در به‌کارگیری روش بدون مش محلی پتـروف- گلرکین برای تحلیل دینامیکی استوانهٔ تو خالی از جنس مواد شبه‌کریستالی بـا سـاختار ده‌وجهـی داشـته‌انـد. در پژوهش ارائه‌شده توسط ایشان، سـطح داخلـی اسـتوانهٔ تحت تأثیر بارگذاری شوک قرار گرفته و گسترش موج در میدان‌های تغییرمکان فنونی و فیزنـی مـورد بررسـی قرار گرفته‌است.

در میـان روش‌هـای عـددی موجـود بـرای حـل معادلات دیفرانسیل جزئـی در مسـائل مهندسـی و نیـز علوم که برپایهٔ روش‌های بدون مش و المان می‌باشـند، روش بدون مش اخـتلاف محـدود تعمـیم‌یافتـه اخیـراً مورد توجه محققان قرار گرفتـه‌اسـت. درزمینـهٔ کـاربرد این روش تاکنون مقالات زیـادی ارائـه شـده‌اسـت کـه برخی از این پژوهش‌ها درادامه بیان می‌گردنـد. اصـول اولیه و روابط ریاضی روش بدون مش اختلاف محدود تعمیم‌یافته توسط بنیتو و همکاران [20] ارائه شده‌است. این روش برای حل معادلات دیفرانسیل جزئـی مرتبـه دوم که طیف وسیعی از پدیده‌های فیزیکی را مـی‌تـوان با این نوع معادلات شبیه‌سازی نمود، مورد استفاده قرار گرفته و توسط بنیتو و همکاران [21] توسعه یافته‌است. لازم به ذکر است که چـون در روش اخـتلاف محـدود تعمیم‌یافته نیازی به ایجاد مش و المان نیست، لـذا ایـن روش دارای قابلیت‌های مناسـبی بـرای حـل معـادلات دیفرانسیل جزئی کوپل‌شده می‌باشد. گویت و همکاران [22] این روش را با روش بدون المان گلرکین مقایسـه نمـوده و مـواردی را بـرای بهبـود ایـن روش در حـل معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه نموده‌اند. همچنین بنیتو و همکـاران [23] کـاربرد ایـن روش را بـرای حـل معادلات دیفرانسیل جزئی در فـرم‌هـای هایپربولیـک و پارابولیک که در تحلیل‌های یک، دو و سه‌بعدی با آنهـا برخورد می‌گردد، توسعه داده‌اند. آنها در پژوهش خـود تحلیل خطا و تأثیر تعداد گره‌هـا روی خطـا را بررسـی نموده‌اند. همچنین روش بدون مـش اخـتلاف محـدود تعمیم‌یافته برای حـل سـایر مسـائل مهندسـی از قبیـل تحلیـل دوبعـدی گسـترش مـوج زلزلـه [24]، تحلیـل

دینامیکی ورق‌ها و تیرها [25] و نیز تحلیل دینامیکی استوانه از جنس نانوکامپوزیت تقویت‌شده با نانو لوله‌های کربنی [26] و اخیراً برای تحلیل انتقال حرارت [27] استفاده شده‌است. در پژوهش‌هایی دیگر، نویسندهٔ مقالهٔ حاضر کابرد روش بدون مش اختلاف محدود تعمیم‌یافته را برای حل مسائل کوپل ترموالاستیسیته براساس تئوری گرین- نقدی [28] و نیز برای تحلیل کوپل الاستیسیته- نفوذ غیر فیکی [29] تحت بارگذاری به‌صورت شوک را توسعه داده‌است.

در این مقاله، کاربرد روش کارامد بدون مش اختلاف محدود تعمیم‌یافته برای تحلیل دینامیکی حالت گذرای دوبعدی مواد شبه‌کریستال با ساختار دوجهی که تحت بارگذاری به‌صورت شوک قرار دارند، توسعه داده شده‌است. از روش فوق برای گسسته‌سازی دسته معادلات دیفرانسیل جزئی کوپل که از معادلات حرکت میدان‌های فنونی و فیزنی براساس مدل الاستوهیدرودینامیک استخراج شده‌اند، بهره گرفته شده‌است. تئوری مفروض برای به‌دست آوردن روابط دینامیکی حاکم، بر این اصل استوار است که تغییرمکان‌های فنونی از معادلهٔ موج بدون میرایی و تغییرمکان‌های فیزنی از معادلهٔ تعادل بدون شتاب ولی با میرایی تبعیت کنند. کوپلینگ بین تغییرمکان‌های فنونی و فیزنی در معادلات حرکت و نیز روابط ساختاری لحاظ شده‌است. ناحیه‌ای دوبعدی از جنس مادهٔ شبه‌کریستال (Al-Ni-Co) به‌شکل مستطیل درنظر گرفته شده‌است به‌طوری‌که یکی از اضلاع آن تحت تأثیر بارگذاری به‌صورت شوک قرار دارد. رفتار دینامیکی حالت گذرای میدان‌های تغییرمکان فنونی و فیزنی به‌دست آمده و مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین اثرات پارامترهایی از قبیل پارامتر کوپلینگ و نیز ضریب میرایی میدان تغییرمکان فیزنی برروی رفتارهای دینامیکی، مورد ارزیابی قرار گرفته‌است.

روابط حاکم بر مسئله

در تئوری الاستیسیتهٔ کلاسیک، تغییرشکل‌ها در مواد کریستالی بااستفاده از تغییرمکان‌های فنونی و نیز کرنش‌های حاصل از آنها، قابل تشریح می‌باشند. همچنین کرنش‌های فنونی را نیز می‌توان با تنش‌های فنونی مرتبط دانست و آنها را نیز محاسبه نمود. ولی در مواد شبه‌کریستال علاوه‌بر تغییرمکان‌های فنونی، تغییرمکان‌های دیگری نیز وجود دارند که به آنها تغییرمکان‌های فیزنی اطلاق می‌شود. این تغییرمکان‌های فیزنی براساس باز آرایش ساختار اتمی مواد شبه‌کریستال ایجاد می‌شوند و قابل توجیه هستند. مشاهده شده‌است که بین میدان‌های تغییرمکان فنونی و فیزنی برهم‌کنش وجود دارد، به‌طوری‌که هر گونه تغییر و یا اغتشاش در یک میدان باعث بروز تغییرات در میدان دیگر می‌شود. برای فهم بیشتر از ماهیت میدان‌های تغییرمکان فنونی و فیزنی، مطالعهٔ مرجع [1] توصیه می‌شود.

بر این اساس معادلات حرکت حاکم بر مسئله مبتنی بر مدل الاستوهیدرودینامیک که برای فرضیات حاکم بر مسئلهٔ ارائه‌شده مناسب است، به‌صورت زیر ارائه می‌شود [10]:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \tag{1}$$

$$H_{ij,j} + g_i = D_{ij} \dot{w}_j \tag{2}$$

که f_i و g_i نیروهای خارجی اعمال‌شده بر میدان‌های فنونی و فیزنی می‌باشند. همچنین ضریب میرایی میدان فیزنی با D_{ij} نمایش داده شده‌است که با فرض همگن و همسانگرد بودن ماده می‌توان نوشت:

$$D_{ij} = D\delta_{ij} \ , \ D > 0 \tag{3}$$

روابط تنش- کرنش براساس الاستیسیتهٔ دوبعدی برای مواد شبه‌کریستال به‌صورت زیر ارائه شده‌است [5]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} + R_{ijkl}\omega_{kl} \qquad (٤)$$

$$H_{ij} = R_{klij}\varepsilon_{kl} + K_{ijkl}\omega_{kl} \qquad (٥)$$

که در روابط فوق H_{ij} و σ_{ij} تنش‌های فنونی و فیزنی هستند و نیز ε_{kl} و ω_{kl} کرنش‌های فنونی و فیزنی می‌باشند که از تغییرات تغییرمکان‌های فنونی $u_i(\mathbf{x},t)$ و فیزنی $w_i(\mathbf{x},t)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\left[u_{i,j}(\mathbf{x},t) + u_{j,i}(\mathbf{x},t)\right] \qquad (٦)$$

$$\omega_{ij}(\mathbf{x},t) = w_{i,j}(\mathbf{x},t) \qquad (٧)$$

لازم به ذکر است که کرنش‌های فیزنی ω_{ij} متقارن نیستند ولی کرنش‌های فنونی ε_{ij} متقارن می‌باشند. تانسور ضرایب مواد و نیز ضرایب کوپلینگ (برهم‌کنش بین میدان‌های فنونی و فیزنی) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند[5]:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{12}\delta_{ij}\delta_{kl} + c_{66}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \\ c_{66} &= (c_{11} - c_{12})/2 \\ K_{ijkl} &= K_1\delta_{ik}\delta_{jl} + K_2\left(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right) \\ R_{ijkl} &= R\Big[\left(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}\right)\varepsilon_{3lk} \\ &\quad + \left(\delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{i2}\delta_{j2}\right)\delta_{kl}\Big], \end{aligned} \qquad (٨)$$

که در روابط فوق c_{11}، c_{12}، K_1، K_2 و R ضرایب مرتبط با خواص مکانیکی مواد شبه‌کریستال بود و ε_{3lk} نماد جایگشتی می‌باشد که به‌صورت $\varepsilon_{123} = 1$ تعریف می‌گردد. روابط زیر بر تانسور ضرایب مواد و خواص مکانیکی مواد شبه‌کریستال حاکم است:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{klij} = c_{jikl} = c_{ijlk}, \\ K_{ijkl} &= K_{klij}, \quad R_{ijkl} = R_{jikl}. \end{aligned} \qquad (٩)$$

روابط مبتنی بر قانون هوک به‌صورت تعمیم‌یافته برای مواد شبه‌کریستال با ساختار ده‌وجهی به‌صورت زیر قابل نمایش می‌باشند [14]:

$$\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yx}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0\\ c_{12} & c_{22} & 0\\ 0 & 0 & c_{66}\\ 0 & 0 & c_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R & R & 0 & 0\\ -R & -R & 0 & 0\\ 0 & 0 & -R & R\\ 0 & 0 & -R & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{xx}\\ \omega_{yy}\\ \omega_{xy}\\ \omega_{yx}\end{pmatrix} \qquad (١٠)$$

$$\begin{pmatrix}H_{xx}\\ H_{yy}\\ H_{xy}\\ H_{yx}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & -R & 0\\ R & -R & 0\\ 0 & 0 & -R\\ 0 & 0 & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & 0 & 0\\ K_2 & K_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & K_1 & -K_2\\ 0 & 0 & -K_2 & K_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{xx}\\ \omega_{yy}\\ \omega_{xy}\\ \omega_{yx}\end{pmatrix} \qquad (١١)$$

برای حل معادلات حرکت میدان‌های فنونی و فیزنی (۱ و ۲) با درنظر گرفتن روابط ارائه‌شده در (۱۰ و ۱۱)، ابتدا معادلات حرکت بااستفاده از تبدیل لاپلاس به محیط لاپلاس انتقال داده می‌شوند و پس از انتقال بااستفاده از روش اختلاف محدود تعمیم‌یافته،

معادلات دیفرانسیل جزئی گسسته می‌شوند. بر این اساس معادلات حرکت را می‌توان در محیط لاپلاس با فرض شرایط اولیهٔ همگن (فرض مقدار و سرعت اولیهٔ صفر برای متغیرها) به‌صورت زیر نوشت:

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{f}_i = \rho s^2 \bar{u}_i \tag{۱۲}$$

$$\bar{H}_{ij,j} + \bar{g}_i = D_{ij}\, s\, \bar{w}_j \tag{۱۳}$$

روش بدون مش اختلاف محدود تعمیم‌یافته. قبل از گسسته‌سازی معادلات حرکت (۱۲ و ۱۳) در محیط لاپلاس، لازم است تا کلیات روش بدون مش اختلاف محدود تعمیم‌یافته تشریح گردد. در این روش مشتقات متغیرهای مسئله پیرامون نقاطی در محیط فرض‌شده برای مسئله، بااستفاده از بسط تیلور به‌صورت خطی بسط داده می‌شوند. اطراف هر یک از گره‌هایی که بسط تیلور پیرامون آنها اعمال شده‌است، گره‌هایی درنظر گرفته می‌شوند که در بسط تیلور از آنها برای تقریب استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که گره‌ها می‌توانند به‌صورت منظم و یا نامنظم در داخل ناحیهٔ مفروض برای مسئله توزیع شوند. به‌عنوان مثال برای متغیرهای اصلی مشتق‌پذیر در مسئلهٔ مفروض در این مقاله در هر نقطه‌ای مانند (x_i, y_i, s) شامل $\bar{u}_x^i = \bar{u}_x(x_i, y_i, s)$، $\bar{w}_x^i = \bar{w}_x(x_i, y_i, s)$، و $\bar{w}_y^i = \bar{w}_y(x_i, y_i, s)$، حول نقطهٔ دل‌خواه (x_0, y_0, s) می‌توان بسط تیلور را به‌صورت معادلات (۱۷-۱٤) نوشت.

$$\bar{u}_x^i = \bar{u}_x^0 + h_i \frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial x} + k_i \frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial x^2} + \frac{k_i^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y \partial x} + o\left(r_i^3\right) \tag{۱٤}$$

$$\bar{u}_y^i = \bar{u}_y^0 + h_i \frac{\partial \bar{u}_y^0}{\partial x} + k_i \frac{\partial \bar{u}_y^0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}_y^0}{\partial x^2} + \frac{k_i^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}_y^0}{\partial y^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 \bar{u}_y^0}{\partial y \partial x} + o\left(r_i^3\right) \tag{۱۵}$$

$$\bar{w}_x^i = \bar{w}_x^0 + h_i \frac{\partial \bar{w}_x^0}{\partial x} + k_i \frac{\partial \bar{w}_x^0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{w}_x^0}{\partial x^2} + \frac{k_i^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{w}_x^0}{\partial y^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 \bar{w}_x^0}{\partial y \partial x} + o\left(r_i^3\right) \tag{۱٦}$$

$$\bar{w}_y^i = \bar{w}_y^0 + h_i \frac{\partial \bar{w}_y^0}{\partial x} + k_i \frac{\partial \bar{w}_y^0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{w}_y^0}{\partial x^2} + \frac{k_i^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{w}_y^0}{\partial y^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 \bar{w}_y^0}{\partial y \partial x} + o\left(r_i^3\right) \tag{۱۷}$$

که در روابط فوق $h_i = x_i - x_0$، $k_i = y_i - y_0$ و $r_i = \sqrt{h_i^2 + k_i^2}$ می‌باشند. بسط‌های ارائه‌شده در روابط (۱۷-۱٤) شامل مشتقات مرتبه اول و دوم می‌باشند، چرا که نیاز مسئله به بسط تا مشتقات مرتبه دوم می‌باشد. لازم به ذکر است که امکان بسط تا مشتقات مراتب بالاتر وجود دارد که این مورد بستگی به حداکثر مرتبهٔ مشتقات موجود در معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسئله دارد. درادامه توابع نورم B_x^u، B_y^u، B_x^w و B_y^w به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_x^u = \sum_{i=1}^{N}\left[\left[\bar{u}_x^0 - \bar{u}_x^i + h_i \frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial x} + k_i \frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial x^2} + \frac{k_i^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y \partial x}\right] W_i\left(h_i, k_i\right)\right]^2 \tag{۱۸}$$

$$B_y^u = \sum_{i=1}^{N} \left[\left[\bar{u}_y^0 - \bar{u}_y^i + h_i \frac{\partial \bar{u}_y^0}{\partial x} + k_i \frac{\partial \bar{u}_y^0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_y^0}{\partial x^2} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_y^0}{\partial y^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 \bar{u}_y^0}{\partial y \partial x} \right] W_i \left(h_i, k_i \right) \right]^2 \quad (۱۹)$$

$$B_x^w = \sum_{i=1}^{N} \left[\left[\bar{w}_x^0 - \bar{w}_x^i + h_i \frac{\partial \bar{w}_x^0}{\partial x} + k_i \frac{\partial \bar{w}_x^0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}_x^0}{\partial x^2} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}_x^0}{\partial y^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 \bar{w}_x^0}{\partial y \partial x} \right] W_i \left(h_i, k_i \right) \right]^2 \quad (۲۰)$$

$$B_y^w = \sum_{i=1}^{N} \left[\left[\bar{w}_y^0 - \bar{w}_y^i + h_i \frac{\partial \bar{w}_y^0}{\partial x} + k_i \frac{\partial \bar{w}_y^0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}_y^0}{\partial x^2} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}_y^0}{\partial y^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 \bar{w}_y^0}{\partial y \partial x} \right] W_i \left(h_i, k_i \right) \right]^2 \quad (۲۱)$$

که $w(h_i)$ تابع وزن بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_i\left(r_i\right)=\frac{1}{r_i^3}=\frac{1}{\left(\sqrt{h_i^2+k_i^2}\right)^3}=\left(h_i^2+k_i^2\right)^{-\frac{3}{2}} \quad (۲۲)$$

با کمینه کردن توابع نورم توابع نورم B_x^u، B_y^u، B_x^w و B_y^w نسبت به مشتق‌های متغیرهای اصلی، روابطی خطی حاصل می‌شود که درادامه برای یکی از متغیرها استخراج خواهند شد. روابط استخراج‌شده برای سایر متغیرها از روشی مشابه، به‌دست می‌آیند؛ لذا روش به‌دست آوردن روابط خطی برای بیان مشتقات جزئی $\bar{u}_x^0$ درادامه ارائه می‌گردد:

$$\frac{\partial B_x^u}{\partial \left\{ D\, \bar{u}_x^0 \right\}} = 0 \quad (۲۳)$$

$$\{D\bar{u}\}^T = \left\{ \frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial x}, \frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial y}, \frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y \partial x} \right\}^T \quad (۲۴)$$

برای هر نقطهٔ دل‌خواه پنج معادله و پنج مجهول به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial x} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 h_i^2 + \frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial y} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 h_i k_i + \frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial x^2} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \frac{h_i^3}{2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y^2} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \frac{h_i k_i^2}{2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y \partial x} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 h_i^2 k_i + \bar{u}_x^0 \sum_{i=1}^{N} w_i^2 h_i - \sum_{i=1}^{N} w_i^2 h_i \bar{u}_x^i = 0 \quad (۲۵)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial x} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 h_i k_i + \frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial y} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 k_i^2 + \frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial x^2} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \frac{h_i^2 k_i}{2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y^2} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \frac{k_i^3}{2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y \partial x} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 h_i k_i^2 + \bar{u}_x^0 \sum_{i=1}^{N} w_i^2 k_i - \sum_{i=1}^{N} w_i^2 k_i \bar{u}_x^i = 0 \quad (۲۶)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial x}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,3}}{2}+\frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial y}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,2}k_i}{2} +\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial x^2}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,4}}{4}+\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y^2}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{k_i^{\,2}h_i^{\,2}}{4}+ +\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y\partial x}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,3}k_i}{2}+\bar{u}_x^0\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,2}}{2} -\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,2}}{2}\bar{u}_x^i=0$$

(۲۷)

$$\frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial x}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i k_i^{\,2}}{2}+\frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial y}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{k_i^{\,3}}{2} +\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial x^2}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,2}k_i^{\,2}}{4}+\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y^2}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{k_i^{\,4}}{4}+ +\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y\partial x}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i k_i^{\,3}}{2}+\bar{u}_x^0\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{k_i^{\,2}}{2} -\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{k_i^{\,2}}{2}\bar{u}_x^i=0$$

(۲۸)

$$\frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial x}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}h_i^{\,2}k_i+\frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial y}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}h_i k_i^{\,2} +\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial x^2}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,3}k_i}{2}+\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y^2}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i k_i^{\,3}}{2}+ +\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y\partial x}\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}h_i^{\,2}k_i^{\,2}+\bar{u}_x^0\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}h_i k_i -\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}h_i k_i\bar{u}_x^i=0$$

(۲۹)

روابـط فـوق بـه‌شـکل ماتریسـی زیـر قابـل ارائـه می‌باشد:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{D}_\mathbf{x}^\mathbf{u}=\mathbf{F}_\mathbf{x}^\mathbf{u} \qquad (۳۰)$$

که:

$$\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}h_i^{\,2} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}h_i k_i & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,3}}{2} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i k_i^{\,2}}{2} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}h_i^{\,2}k_i \\
\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}h_i k_i & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}k_i^{\,2} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,2}k_i}{2} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{k_i^{\,3}}{2} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}h_i k_i^{\,2} \\
\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,3}}{2} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,2}k_i}{2} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,4}}{4} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{k_i^{\,2}h_i^{\,2}}{4} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,3}k_i}{2} \\
\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i k_i^{\,2}}{2} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{k_i^{\,3}}{2} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,2}k_i^{\,2}}{4} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{k_i^{\,4}}{4} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i k_i^{\,3}}{2} \\
\sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}h_i^{\,2}k_i & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}h_i k_i^{\,2} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i^{\,3}k_i}{2} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}\frac{h_i k_i^{\,3}}{2} & \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2}h_i^{\,2}k_i^{\,2}
\end{bmatrix}$$

(۳۱)

$$\mathbf{D}_\mathbf{x}^{\mathbf{u}\ \mathbf{T}}=\left\{\frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial x},\frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial y},\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial x^2},\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y^2},\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y\,\partial x}\right\}^T \qquad (۳۲)$$

$$\mathbf{F_x^u} = \begin{bmatrix} -\bar{u}_x^0 \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} h_i + \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} h_i \bar{u}_x^i \\ -\bar{u}_x^0 \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} k_i + \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} k_i \bar{u}_x^i \\ -\bar{u}_x^0 \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} \frac{h_i^{\,2}}{2} + \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} \frac{h_i^{\,2}}{2} \bar{u}_x^i \\ -\bar{u}_x^0 \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} \frac{k_i^{\,2}}{2} + \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} \frac{k_i^{\,2}}{2} \bar{u}_x^i \\ -\bar{u}_x^0 \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} h_i k_i + \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} h_i k_i \bar{u}_x^i \end{bmatrix} \qquad (۳۳)$$

رابطهٔ (۳۰) به‌صورت زیر قابل حل می‌باشد:

$$\mathbf{D_u} = \left[\mathbf{A^*}\right]^{-1} \mathbf{F_u} = \mathbf{B}\mathbf{F_u} \qquad (۳۴)$$

بااستفاده از رابطهٔ (۳۴)، مشتقات $\bar{u}_x^0$ به‌صورت زیر قابل بازنویسی می‌باشند:

$$\frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial x} = B_{11}\left(-\bar{u}_x^0 \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} h_i + \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} h_i \bar{u}_x^i\right) + B_{12}\left(-\bar{u}_x^0 \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} k_i + \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} k_i \bar{u}_x^i\right) + B_{13}\left(-\bar{u}_x^0 \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} \frac{h_i^{\,2}}{2} + \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} \frac{h_i^{\,2}}{2} \bar{u}_x^i\right) + B_{14}\left(-\bar{u}_x^0 \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} \frac{k_i^{\,2}}{2} + \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} \frac{k_i^{\,2}}{2} \bar{u}_x^i\right) + B_{15}\left(-\bar{u}_x^0 \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} h_i k_i + \sum_{i=1}^{N} w_i^{\,2} h_i k_i \bar{u}_x^i\right) \qquad (۳۵)$$

و یا:

$$\frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial x} = \bar{u}_x^0 \eta_0 + \sum_{i=1}^{N} \eta_i \bar{u}_x^i \qquad (۳۶)$$

که در رابطهٔ فوق ضرایب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\eta_i = B_{11} w_i^{\,2} h_i + B_{12} w_i^{\,2} k_i + B_{13} w_i^{\,2} \frac{h_i^{\,2}}{2} + B_{14} w_i^{\,2} \frac{k_i^{\,2}}{2} + B_{15} w_i^{\,2} h_i k_i \qquad (۳۷)$$

$$\eta_0 + \sum_{i=1}^{N} \eta_i = 0 \qquad (۳۸)$$

سایر مشتقات $\bar{u}_x^0$ بااستفاده از روشی مشابه به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial y} = \bar{u}_x^0 \lambda_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \bar{u}_x^i \qquad (۳۹)$$

$$\lambda_i = B_{21} w_i^{\,2} h_i + B_{22} w_i^{\,2} k_i + B_{23} w_i^{\,2} \frac{h_i^{\,2}}{2} + B_{24} w_i^{\,2} \frac{k_i^{\,2}}{2} + B_{25} w_i^{\,2} h_i k_i \qquad (۴۰)$$

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 0 \qquad (۴۱)$$

و:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial x^2} = \bar{u}_x^0 \tau_0 + \sum_{i=1}^{N} \tau_i \bar{u}_x^i \qquad (۴۲)$$

$$\tau_i = B_{31} w_i^2 h_i + B_{32} w_i^2 k_i + B_{33} w_i^2 \frac{h_i^2}{2} + B_{34} w_i^2 \frac{k_i^2}{2} + B_{35} w_i^2 h_i k_i \qquad (۴۳)$$

$$\tau_0 + \sum_{i=1}^{N} \tau_i = 0 \qquad (۴۴)$$

و نیز:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y^2} = \bar{u}_x^0 \psi_0 + \sum_{i=1}^{N} \psi_i \bar{u}_x^i \qquad (۴۵)$$

$$\psi_i = B_{41} w_i^2 h_i + B_{42} w_i^2 k_i + B_{43} w_i^2 \frac{h_i^2}{2} + B_{44} w_i^2 \frac{k_i^2}{2} + B_{45} w_i^2 h_i k_i \qquad (۴۶)$$

$$\psi_0 + \sum_{i=1}^{N} \psi_i = 0 \qquad (۴۷)$$

و درنهایت می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_x^0}{\partial y \, \partial x} = \bar{u}_x^0 \varphi_0 + \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \bar{u}_x^i \qquad (۴۸)$$

$$\varphi_i = B_{51} w_i^2 h_i + B_{52} w_i^2 k_i + B_{53} w_i^2 \frac{h_i^2}{2} + B_{54} w_i^2 \frac{k_i^2}{2} + B_{55} w_i^2 h_i k_i \qquad (۴۹)$$

$$\varphi_0 + \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = 0 \qquad (۵۰)$$

ضرایب B_{ij} مؤلفه‌های ماتریس $\mathbf{B}$ می‌باشند. بااستفاده از روند ارائه‌شدهٔ فوق، مشتق‌های $\bar{u}_y^0$، $\bar{w}_x^0$ و $\bar{w}_y^0$ می‌توانند محاسبه شوند که به‌صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{Bmatrix}\bar{u}_y^0\\ \bar{w}_x^0\\ \bar{w}_y^0\end{Bmatrix} = \eta_0 \begin{Bmatrix}\bar{u}_y^0\\ \bar{w}_x^0\\ \bar{w}_y^0\end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{N} \eta_i \begin{Bmatrix}\bar{u}_y^i\\ \bar{w}_x^i\\ \bar{w}_y^i\end{Bmatrix} \qquad (۵۱)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{Bmatrix}\bar{u}_y^0\\ \bar{w}_x^0\\ \bar{w}_y^0\end{Bmatrix} = \lambda_0 \begin{Bmatrix}\bar{u}_y^0\\ \bar{w}_x^0\\ \bar{w}_y^0\end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \begin{Bmatrix}\bar{u}_y^i\\ \bar{w}_x^i\\ \bar{w}_y^i\end{Bmatrix} \qquad (۵۲)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{Bmatrix}\bar{u}_y^0\\ \bar{w}_x^0\\ \bar{w}_y^0\end{Bmatrix} = \tau_0 \begin{Bmatrix}\bar{u}_y^0\\ \bar{w}_x^0\\ \bar{w}_y^0\end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{N} \tau_i \begin{Bmatrix}\bar{u}_y^i\\ \bar{w}_x^i\\ \bar{w}_y^i\end{Bmatrix} \qquad (۵۳)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{Bmatrix}\bar{u}_y^0\\ \bar{w}_x^0\\ \bar{w}_y^0\end{Bmatrix} = \psi_0 \begin{Bmatrix}\bar{u}_y^0\\ \bar{w}_x^0\\ \bar{w}_y^0\end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{N} \psi_i \begin{Bmatrix}\bar{u}_y^i\\ \bar{w}_x^i\\ \bar{w}_y^i\end{Bmatrix} \qquad (۵۴)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}\begin{Bmatrix}\bar{u}_y^0\\ \bar{w}_x^0\\ \bar{w}_y^0\end{Bmatrix} = \varphi_0 \begin{Bmatrix}\bar{u}_y^0\\ \bar{w}_x^0\\ \bar{w}_y^0\end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \begin{Bmatrix}\bar{u}_y^i\\ \bar{w}_x^i\\ \bar{w}_y^i\end{Bmatrix} \qquad (۵۵)$$

معادلات حرکت میدان‌های فنونی و فیزنی به‌شکل گسسته. بااستفاده از روابط ارائه‌شده در بخش قبل برای مشتقات جزئی متغیرهای اصلی مسئله و جایگزینی این روابط در روابط (۱۲ و ۱۳)، معادلات دوبعدی حرکت به‌شکل گسسته در نقطه‌ای دل‌خواه (x_0, y_0, s) در محیط لاپلاس برای مواد شبه‌کریستال با ساختار دوجهی به‌دست می‌آیند. معادلات حرکت با فرض شرایط اولیهٔ همگن برای متغیرهای اصلی مسئله و نیز فرض صفر بودن نیروهای

خارجی در مختصات کارتزین به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}&c_{11}\left(\tau_0\,\bar{u}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\tau_i\,\bar{u}_x^i\right)+c_{66}\left(\psi_0\,\bar{u}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\psi_i\,\bar{u}_x^i\right)\\&+\left(c_{12}+c_{66}\right)\left(\varphi_0\,\bar{u}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\,\bar{u}_y^i\right)+\\&+R\left(\tau_0\,\bar{w}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\tau_i\,\bar{w}_x^i\right)-R\left(\psi_0\,\bar{w}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\psi_i\,\bar{w}_x^i\right)\\&+2R\left(\varphi_0\,\bar{w}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\,\bar{w}_y^i\right)=\rho\,s^2\,\bar{u}_x^0\end{aligned}$$

(٥٦)

$$\begin{aligned}&c_{66}\left(\tau_0\,\bar{u}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\tau_i\,\bar{u}_y^i\right)+c_{22}\left(\psi_0\,\bar{u}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\psi_i\,\bar{u}_y^i\right)\\&+\left(c_{12}+c_{66}\right)\left(\varphi_0\,\bar{u}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\,\bar{u}_x^i\right)+\\&+R\left(\tau_0\,\bar{w}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\tau_i\,\bar{w}_y^i\right)-R\left(\psi_0\,\bar{w}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\psi_i\,\bar{w}_y^i\right)\\&-2R\left(\varphi_0\,\bar{w}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\,\bar{w}_x^i\right)=\rho\,s^2\,\bar{u}_y^0\end{aligned}$$

(٥٧)

$$\begin{aligned}&K_1\left(\tau_0\,\bar{w}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\tau_i\,\bar{w}_x^i\right)+K_1\left(\psi_0\,\bar{w}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\psi_i\,\bar{w}_x^i\right)\\&+R\left(\tau_0\,\bar{u}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\tau_i\,\bar{u}_x^i\right)--R\left(\psi_0\,\bar{u}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\psi_i\,\bar{u}_x^i\right)\\&-2R\left(\varphi_0\,\bar{u}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\,\bar{u}_y^i\right)=D\,s\,\bar{w}_x^0\end{aligned}$$

(٥٨)

$$\begin{aligned}&K_1\left(\tau_0\,\bar{w}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\tau_i\,\bar{w}_y^i\right)+K_1\left(\psi_0\,\bar{w}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\psi_i\,\bar{w}_y^i\right)\\&+R\left(\tau_0\,\bar{u}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\tau_i\,\bar{u}_y^i\right)--R\left(\psi_0\,\bar{u}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\psi_i\,\bar{u}_y^i\right)\\&+2R\left(\varphi_0\,\bar{u}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\,\bar{u}_x^i\right)=D\,s\,\bar{w}_y^0\end{aligned}$$

(٥٩)

معادلات فوق را می‌توان به‌شکل زیر نیز نمایش داد:

$$\begin{aligned}&\left(\tau_0\,c_{11}+\psi_0\,c_{66}-\rho\,s^2\right)\bar{u}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\left(\tau_i\,c_{11}+\psi_i\,c_{66}\right)\bar{u}_x^i\\&+\left(c_{12}\,\varphi_0+c_{66}\,\varphi_0\right)\bar{u}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\left(c_{12}\,\varphi_i+c_{66}\,\varphi_i\right)\bar{u}_y^i+\\&+\left(R\,\tau_0-R\psi_0\right)\bar{w}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\left(R\,\tau_i-R\psi_i\right)\bar{w}_x^i\\&+\left(2R\varphi_0\right)\bar{w}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\left(2R\varphi_i\right)\bar{w}_y^i=0\end{aligned}$$

(٦٠)

$$\begin{aligned}&\left(c_{12}\,\varphi_0+c_{66}\,\varphi_0\right)\bar{u}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\left(c_{12}\,\varphi_i+c_{66}\,\varphi_i\right)\bar{u}_x^i\\&+\left(c_{66}\,\tau_0+c_{22}\,\psi_0-\rho\,s^2\right)\bar{u}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\left(c_{66}\,\tau_i+c_{22}\,\psi_i\right)\bar{u}_y^i+\\&+\left(2\,R\varphi_0\right)\bar{w}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\left(2\,R\varphi_i\right)\bar{w}_x^i\\&+\left(R\,\tau_0-R\psi_0\right)\bar{w}_y^0+\sum_{i=1}^{N}\left(R\,\tau_i-R\psi_i\right)\bar{w}_y^i=0\end{aligned}$$

(٦١)

$$\begin{aligned}&\left(K_1\tau_0+K_1\psi_0-D\,s\right)\bar{w}_x^0\\&+\sum_{i=1}^{N}\left(K_1\tau_i+K_1\psi_i\right)\bar{w}_x^i+R\left(\tau_0-\psi_0\right)\bar{u}_x^0+\\&+\sum_{i=1}^{N}R\left(\tau_i-\psi_i\right)\bar{u}_x^i\\&-\left(2R\varphi_0\right)\bar{u}_y^0-\sum_{i=1}^{N}\left(2R\varphi_i\right)\bar{u}_y^i=0\end{aligned}$$

(٦٢)

$$\begin{aligned}&\left(K_1\tau_0+K_1\psi_0-D\,s\right)\bar{w}_y^0\\&+\sum_{i=1}^{N}\left(K_1\tau_i+K_1\psi_i\right)\bar{w}_y^i+\left(R\,\tau_0-R\psi_0\right)\bar{u}_y^0+\\&+\sum_{i=1}^{N}\left(R\,\tau_i-R\psi_i\right)\bar{u}_y^i\\&+\left(2R\varphi_0\right)\bar{u}_x^0+\sum_{i=1}^{N}\left(2R\varphi_i\right)\bar{u}_x^i=0\end{aligned}$$

(٦٣)

دستگاه معادلات خطی زیر برای مقادیر متغیرهای اصلی مسئله در گره‌های مختلف توزیع‌شده در ناحیهٔ مفروض مسئله، به‌صورت زیر قابل نمایش می‌باشد:

$$\left[K\right]_{(N+1)*(N+1)}\left\{\phi\right\}_{(N+1)*1}=\left[f\right]_{(N+1)*1} \qquad (٦٤)$$

که:

$$\left\{\phi\right\}^{T}=\left\{\bar{u}_x^0 \quad \bar{u}_y^0 \quad \bar{w}_x^0 \quad \bar{w}_y^0 \quad \bar{u}_x^1 \quad \bar{u}_y^1 \quad \bar{w}_x^1 \quad \bar{w}_y^1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \bar{u}_x^N \quad \bar{u}_y^N \quad \bar{w}_x^N \quad \bar{w}_y^N\right\}^{T} \qquad (٦٥)$$

مقدار مؤلفه‌های ماتریس $\left[f\right]_{(N+1)*1}$ از شرایط مرزی مسئله قابل محاسبه می‌باشند. با حل دستگاه معادلات خطی (٦٤) در محیط لاپلاس مقادیر نامعلوم تغییرمکان‌های فنونی و فیزنی در گره‌های مختلف محاسبه می‌شوند. برای به‌دست آوردن مقادیر تغییرمکان‌های فنونی و فیزنی در حوزهٔ زمان، می‌توان از روش‌های تبدیل لاپلاس معکوس استفاده نمود. در این مقاله از الگوریتم ارائه‌شده در روش تالبوت [30] استفاده شده‌است. تغییرمکان‌های فنونی و فیزنی در حوزهٔ زمان بااستفاده از روابط زیر محاسبه شده‌اند:

$$\bar{u}_x^i(x,y,t)=\frac{2}{5t}\sum_{k=0}^{M-1}\mathrm{Re}(\gamma_k\bar{u}_x^i(x,y,s_k))$$
$$\bar{u}_y^i(x,y,t)=\frac{2}{5t}\sum_{k=0}^{M-1}\mathrm{Re}(\gamma_k\bar{u}_y^i(x,y,s_k))$$
$$\bar{w}_x^i(x,y,t)=\frac{2}{5t}\sum_{k=0}^{M-1}\mathrm{Re}(\gamma_k\bar{w}_x^i(x,y,s_k))$$
$$\bar{w}_y^i(x,y,t)=\frac{2}{5t}\sum_{k=0}^{M-1}\mathrm{Re}(\gamma_k\bar{w}_y^i(x,y,s_k)) \qquad (٦٦)$$

که در روابط فوق:

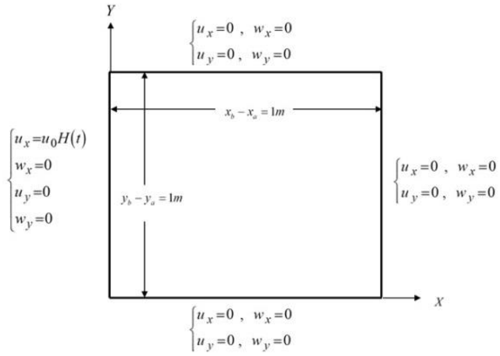
$$s_k=\frac{\delta_k}{t}\ ,\ \delta_0=\frac{2M}{5},\ \ \gamma_0=0.5e^{\delta_0}$$
$$\delta_k=\frac{2k\pi}{5}\left(\cot\left(\frac{k\pi}{M}\right)+i\right)\quad ,$$
$$\gamma_k=\left[1+i\left(\frac{k\pi}{M}\right)\left(1+\left[\cot\left(\frac{k\pi}{M}\right)\right]^2\right)-i\cot\left(\frac{k\pi}{M}\right)\right]e^{\delta_k}$$
$$0<k<M \qquad (٦٧)$$

در این روش، برای انتقال یک نمودار از حوزهٔ لاپلاس به حوزهٔ زمان ابتدا تعداد M نقطه برروی نمودار در حوزهٔ لاپلاس انتخاب می‌شود و متناظر این نقاط در حوزهٔ زمان محاسبه می‌شوند که برای این منظور از روابط فوق بهره گرفته می‌شود. با اتصال نقاط حاصل‌شده در حوزهٔ زمان نمودار معادل در حوزهٔ زمان حاصل می‌شود. هرچه تعداد نقاط انتخاب‌شده در نمودار بیشتر باشد، دقت بیشتری در انتقال حاصل می‌گردد.

مثال عددی و ارائهٔ نتایج

ناحیه‌ای دوبعدی به‌شکل مستطیل به‌طول (x_b-x_a) و عرض (y_b-y_a) از جنس مواد شبه‌کریستال فرض می‌شود به‌طوری‌که خواص مکانیکی شبه‌کریستال (Al-Ni-Co) برای آن درنظر گرفته می‌شود (شکل ۱). خواص مکانیکی ناحیهٔ دوبعدی مستطیل‌شکل به‌صورت زیر می‌باشد [15]:

$$c_{11}=234.3\ GPa,\ c_{11}=c_{22},\ c_{12}=57.4\ GPa,\ K_1=122\ GPa,\ K_2=24\ GPa,\ \rho=4180\ kg/m^3,\ c_{66}=\left(c_{11}-c_{12}\right)*0.5,\ R=R^*c_{66},\ D=10^{+10}\ Kg/m^3s. \qquad (٦٨)$$



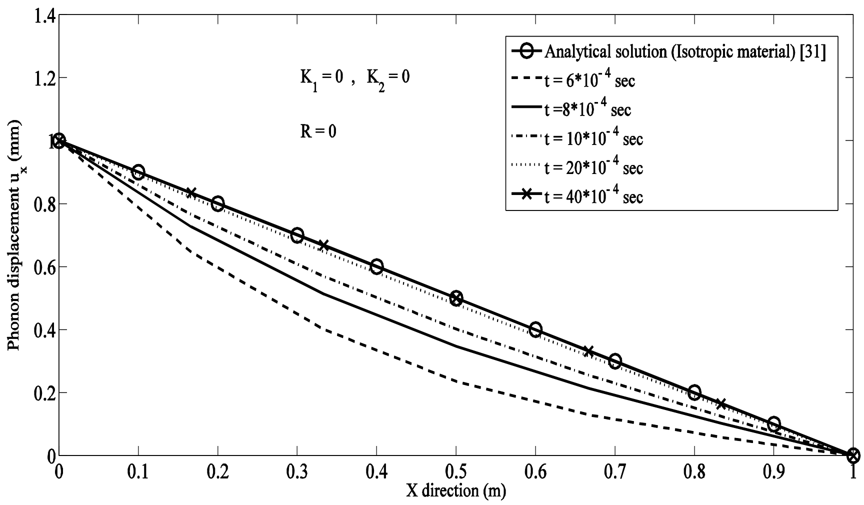
شکل ۱ ناحیهٔ دوبعدی مفروض به‌همراه شرایط مرزی

قبل از ارائهٔ نتایج حاصل از تحلیل برروی مواد شبه‌کریستال با ساختار ده‌وجهی، لازم است تا روش ارائه‌شده در این پژوهش صحه‌گذاری شود. باتوجه به این‌که پژوهش حاضر اولین تحلیل‌های صورت‌گرفته در این حوزه می‌باشد، برای صحه‌گذاری عرض ناحیهٔ مستطیلی دوبعدی مفروض بسیار بزرگ‌تر از طول ناحیه درنظر گرفته می‌شود $(y_b >> y_a)$ و پارامترهای زیر نیز صفر فرض می‌شود:

$$K_1 = K_2 = 0,\ R = 0 \quad (٦٩)$$

درنتیجه ناحیهٔ دوبعدی تبدیل به یک باریکه از جنس مواد همگن و همسانگرد می‌شود. توزیع تغییرمکان در باریکه از جنس مواد همگن و همسان‌گرد در حالت استاتیکی حل تحلیلی دارد [31] و انتظار می‌رود که پاسخ‌های به‌دست‌آمده از پژوهش حاضر با فرضیات فوق در زمان‌های بزرگ به حل تحلیلی موجود میل کند. به‌عبارت دیگر در زمان‌های بزرگ و پس از طی‌شدن زمان تغییرات حالت گذرا در میدان تغییرمکان فنونی، توزیع تغییرمکان فنونی در راستای x می‌بایست با توزیع تغییرمکان در باریکه در حالت استاتیکی برابر باشند. در شکل (۲) مقایسه‌ای بین پاسخ‌های به‌دست‌آمده و حل تحلیلی موجود ارائه شده‌است و به‌وضوح مشاهده می‌گردد که با بزرگ‌تر شدن زمان نمودار توزیع تغییرمکان فنونی u_x به نتایج حاصل از حل تحلیلی میل می‌کند.

اکنون مسئله با فرض خواص مکانیکی ارائه‌شده در روابط (٦٨) تحلیل می‌شود. به‌منظور به‌دست آوردن تأثیر پارامتر کوپل بین میدان‌های تغییرمکان فنونی و فیزنی R بر پاسخ‌های دینامیکی حالت گذار، مقادیر مختلفی برای R^* درنظر گرفته شده‌است که عبارتند از: ۰/٤ و ۰/۸ و ۱/۲ شرایط مرزی فرض‌شده برای مسئله در شکل (۱) به‌وضوح نمایش داده شده‌اند.



شکل ۲ مقایسهٔ نتایج حاصل از پژوهش ارائه‌شده و حل تحلیلی موجود [31] برای باریکه از جنس مواد همگن همسان‌گرد

همان‌طور که در شکل نیز مشاهده می‌شود، تغییرمکان فنونی یکی از اضلاع ناحیهٔ مستطیلی شکل به‌صورت ناگهانی افزایش می‌یابد که این افزایش ناگهانی به‌صورت بارگذاری شوک قابل نمایش می‌باشد؛ لذا برای بیان این افزایش ناگهانی از تابع پلهٔ واحد استفاده شده‌است که با $\mathrm{H}(\mathrm{t})$ نمایش داده می‌شود. شرایط مرزی مفروض برای مسئله به‌صورت معادلات (۷۲-۶۹) قابل نمایش می‌باشند:

$$u_x(x_a,y,t)=u_0*H(t) \quad , \quad u_y(x_a,y,t)=0 \quad , \quad w_x(x_a,y,t)=0 \quad , \quad w_y(x_a,y,t)=0 \tag{۷۰}$$

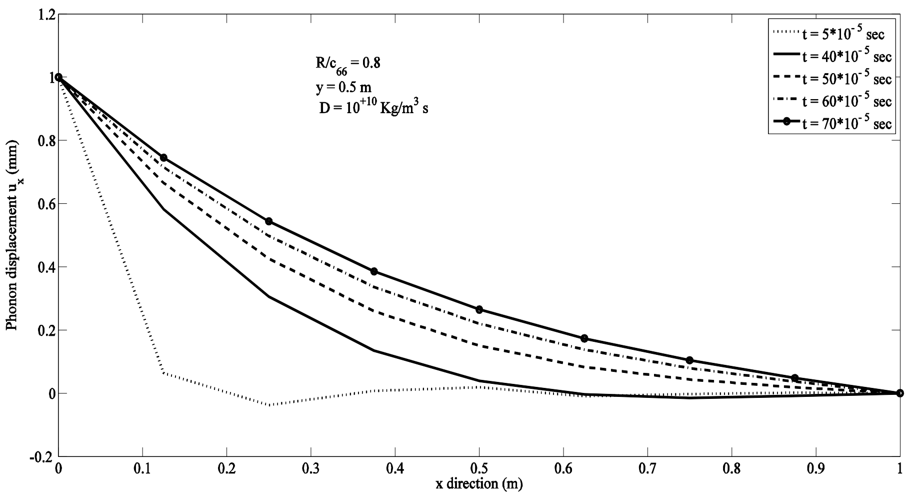
$$u_x(x_b,y,t)=0 \quad , \quad u_y(x_b,y,t)=0 \quad , w_x(x_b,y,t)=0 \quad , \quad w_y(x_b,y,t)=0 \tag{۷۱}$$

$$u_x(x,y_a,t)=0 \quad , \quad u_y(x,y_a,t)=0 \quad , w_x(x,y_a,t)=0 \quad , \quad w_y(x,y_a,t)=0 \tag{۷۲}$$

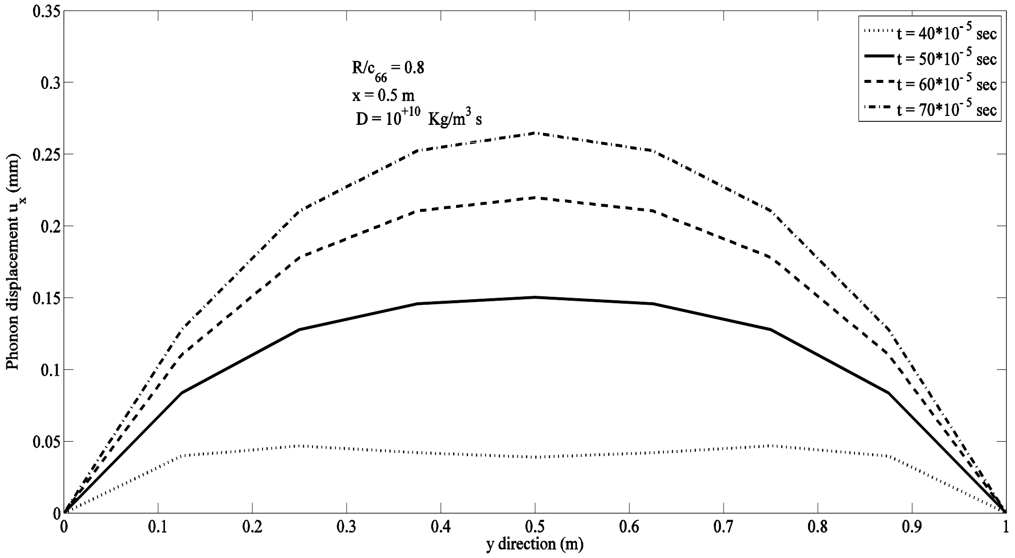
$$u_x(x,y_b,t)=0 \quad , \quad u_y(x,y_b,t)=0 \quad , w_x(x,y_b,t)=0 \quad , \quad w_y(x,y_b,t)=0 \tag{۷۳}$$

که در این روابط فرض بر این است که $u_0=1mm$ باشد. درادامه پاسخ‌های دینامیکی حالت گذرای هریک از تغییرمکان‌های فنونی و فیزنی مورد بررسی و مطالعه قرار خواهد گرفت.

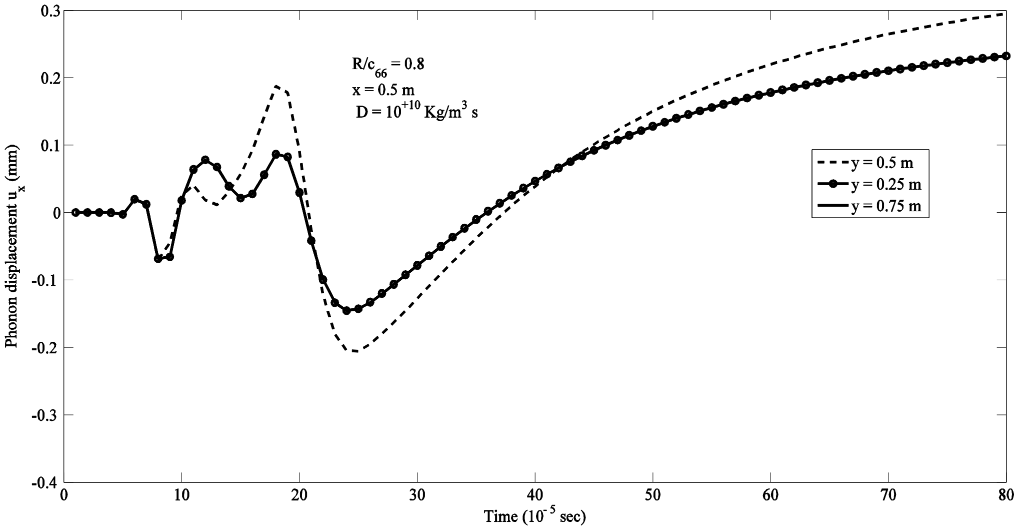
توزیع تغییرمکان فنونی u_x درراستای x در زمان‌های مختلف در شکل (۳) نمایش داده شده‌است. همان‌طور که در شکل مشخص است پیشانی موج تغییرمکان فنونی u_x در زمان‌های مختلف قابل رصد می‌باشد. این بدان معناست که موج تغییرمکان فنونی با سرعتی محدود در ماده گسترش می‌یابد و روش ارائه‌شده در این مقاله توانایی رصد این موج را دارا می‌باشد. در شکل (٤) اثر افزایش زمان بر توزیع تغییرمکان فنونی u_x درراستای y نمایش داده شده‌است. از شکل (٤) و نمودارهای ارائه‌شده در آن مشخص است که با افزایش زمان نمودارهای توزیع به یکدیگر نزدیک می‌شود و چنین برمی‌آید که به مقادیر ثابتی و یا به‌عبارت دیگر به یک نمودار میل کنند. برای این‌که صحت این پدیده ثابت شود تغییرات u_x نسبت به زمان در شکل (۵) نمایش داده شده‌است.



شکل ۳ توزیع تغییرمکان فنونی u_x درراستای x در زمان‌های مختلف



شکل ٤ توزیع تغییرمکان فنونی u_x درراستای y در زمان‌های مختلف



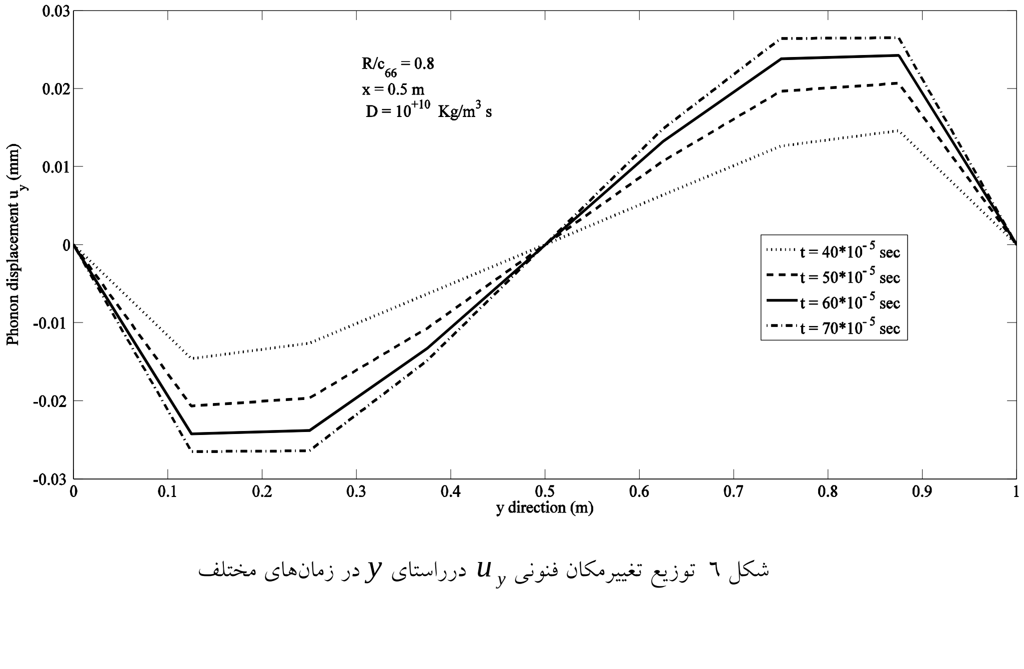
شکل ٥ تغییرات u_x نسبت به زمان در نقاط مختلفی برروی ناحیهٔ مفروض

همان‌طور که در شکل (٥) به‌وضوح مشاهده می‌شود، در زمان‌های بزرگ مقادیر تغییرمکان‌های فنونی u_x به مقادیر ثابتی میل می‌کنند. این بدان معناست که پس از اعمال بارگذاری به‌صورت شوک ابتدا رفتار حالت گذرای تغییرمکان فنونی u_x مشاهده می‌شود و با گذشت زمان این رفتار حالت گذرا از بین می‌رود و پاسخ‌های دینامیکی به پاسخ‌های ناشی از بار استاتیکی میل می‌کنند. نمودارهای ارائه‌شده در شکل (٥) برای نقاط مختلفی روی ناحیهٔ دوبعدی مسئله رسم شده‌اند. همچنین در این شکل کاملاً مشخص است که رفتار حالت گذرای تغییرمکان فنونی u_x در زمان‌های کمتر از 25×10^{-5} sec اتفاق می‌افتد ($t \leq 25\times10^{-5}$ sec).

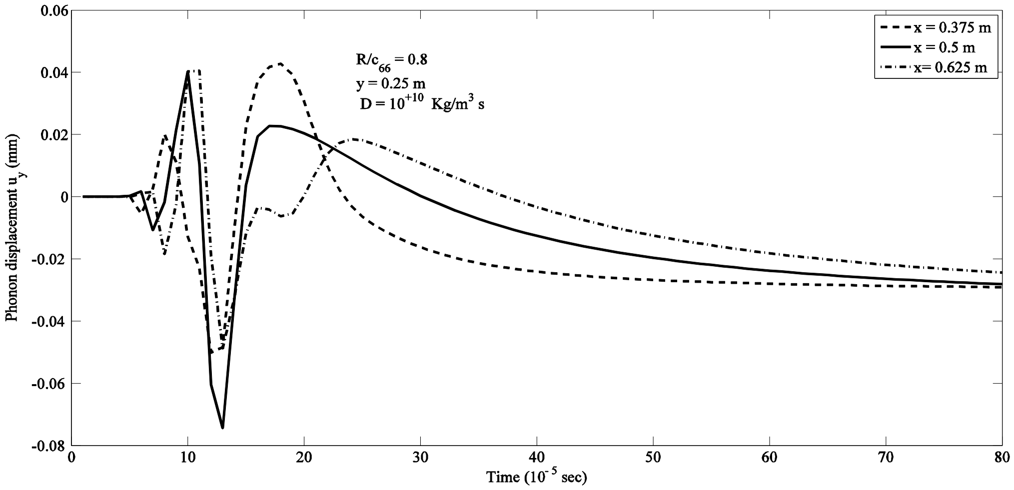
در شکل‌های (٦ و ٧) به‌ترتیب توزیع تغییرمکان فنونی u_y درراستای y در زمان‌های مختلف و نیز تغییرات u_y نسبت به زمان برای نقاط مختلفی روی ناحیهٔ دوبعدی ترسیم شده‌اند.

همان‌طور که در هر دو شکل به‌وضوح مشاهده می‌شود، در زمان‌های کمتر از 25×10^{-5} sec رفتار حالت گذرا مشاهده می‌شود و پس از این زمان تغییرمکان‌های فنونی u_y به‌سمت مقادیری ثابت میل می کنند. باتوجه به این موضوع می‌توان نتیجه گرفت که رفتاری مشابه برای تغییرمکان‌های فنونی می‌توان مشاهده نمود و رفتار حالت گذرای تغییرمکان‌های فنونی تحت تأثیر بارگذاری به‌صورت شوک در زمان‌های کمتر از 25×10^{-5} sec اتفاق می‌افتد.

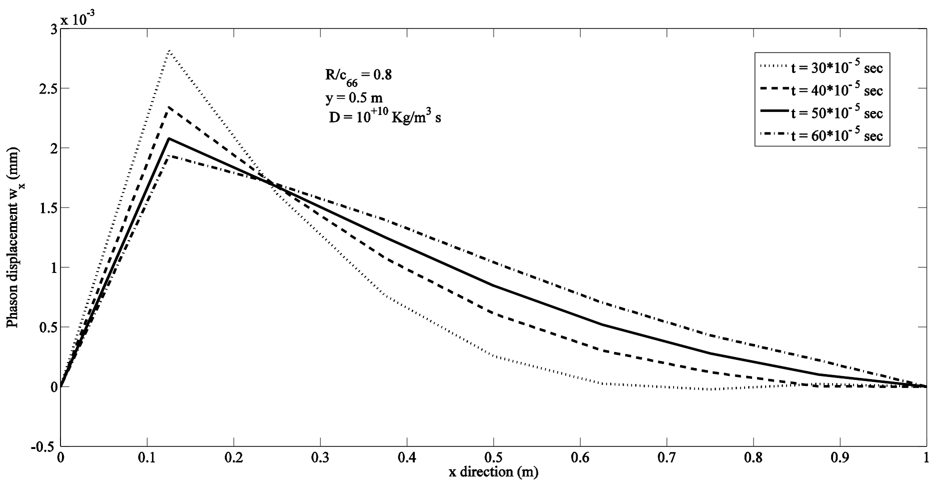
همان‌طور که در بخش‌های قبلی ذکر شد، میدان‌های تغییرمکان فنونی و فیزنی با یکدیگر کوپل هستند و یا به‌عبارت دیگر دارای برهم‌کنش می‌باشند. هرگونه تغییر در یکی از این میدان‌ها باعث ایجاد تغییرات در میدان دیگر می‌شود. شکل (٨) نشان می‌دهد که میدان تغییرمکان w_x تحت تأثیر بارگذاری شوک اعمال شده به میدان تغییرمکان فنونی قرار دارد. توزیع تغییرمکان فیزنی w_x درراستای x در زمان‌های مختلف در شکل (٨) نشان داده شده و در شکل (٩) توزیع w_x درراستای y نمایش داده شده‌است. در هر دو شکل (٨ و ٩) کاملاً مشخص است که میدان تغییرمکان فیزنی w_x تحت تأثیر تغییرات در میدان تغییرمکان فنونی قرار دارد. رفتار دینامیکی تغییرمکان‌های فیزنی نیز به‌صورت گذرا است و برای این‌که ناحیهٔ حالت گذرا مشخص شود لازم است تا تغییرات w_x نسبت به زمان رسم شود. بر این اساس تغییرات w_x نسبت به زمان در نقاط مختلفی برروی ناحیهٔ مستطیلی به‌دست آمده‌اند که در شکل (١٠) رسم شده‌اند. در این نمودار نیز کاملاً مشخص است که ناحیهٔ تغییرات حالت گذرا در زمان‌های کمتر از 25×10^{-5} sec اتفاق می‌افتد. در زمان‌های بزرگ‌تر، مقادیر تغییرمکان‌های فیزنی w_x به مقادیر ثابتی میل می‌کنند. رفتار مشابهی برای تغییرمکان فیزنی w_y مشاهده می‌گردد که در شکل‌های (١١ و ١٢) به‌وضوح قابل مشاهده می‌باشد. در این دو شکل به‌ترتیب تغییرات تغییرمکان فیزنی w_y درراستای y و تغییرات این تغییرمکان نسبت به زمان برای نقاط مختلفی روی ناحیهٔ مستطیلی، نشان داده شده‌اند.



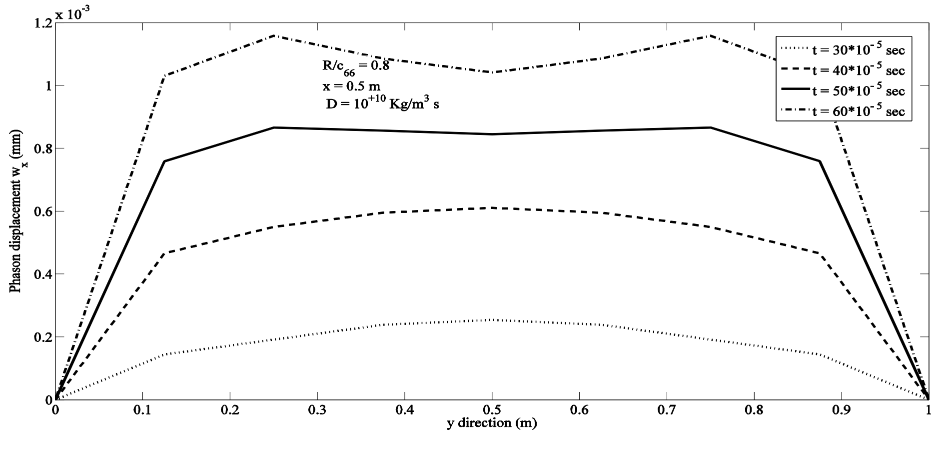
شکل ٦ توزیع تغییرمکان فنونی u_y درراستای y در زمان‌های مختلف



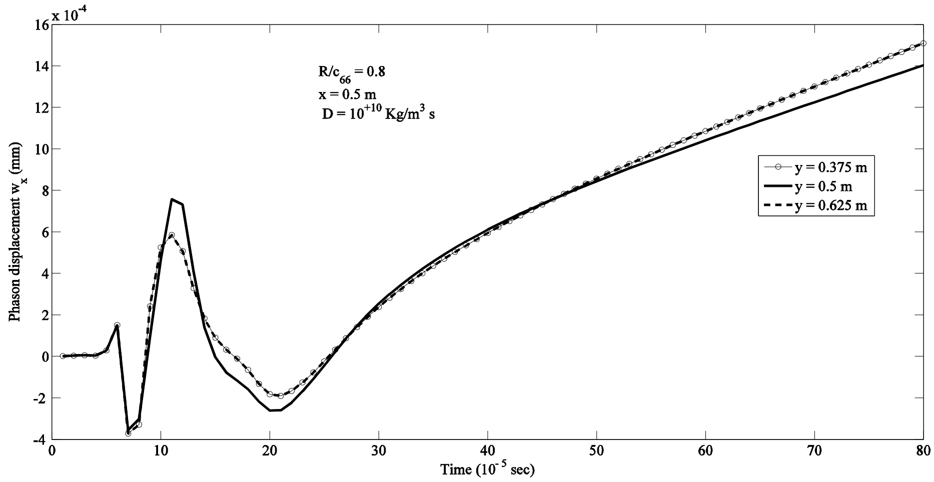
شکل ۷ تغییرات u_y نسبت به زمان در نقاط مختلفی برروی ناحیهٔ مفروض



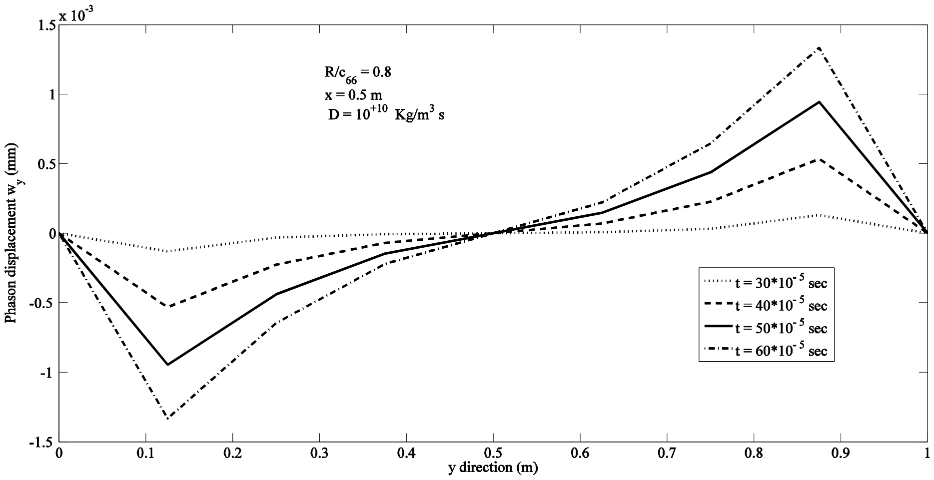
شکل ۸ توزیع تغییرمکان فنونی w_x درراستای x در زمان‌های مختلف



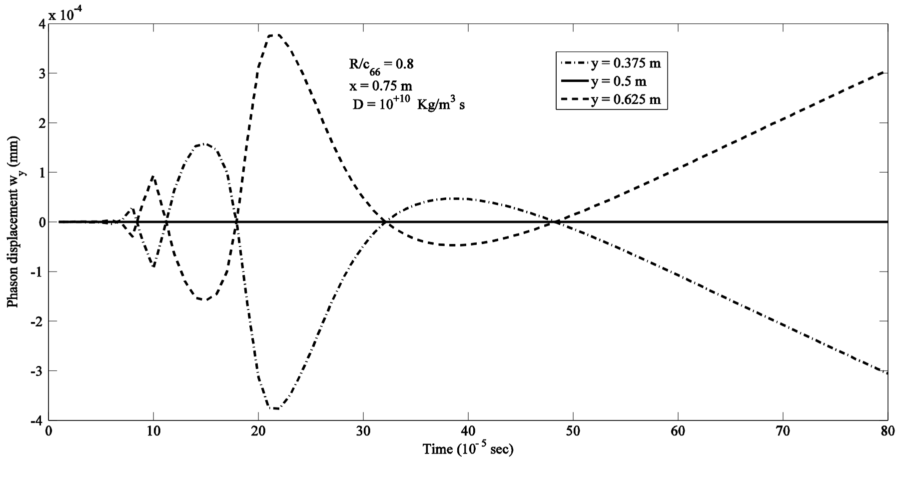
شکل ۹ توزیع تغییرمکان فنونی w_x درراستای y در زمان‌های مختلف



شکل ۱۰ تغییرات w_x نسبت به زمان در نقاط مختلفی برروی ناحیهٔ مفروض



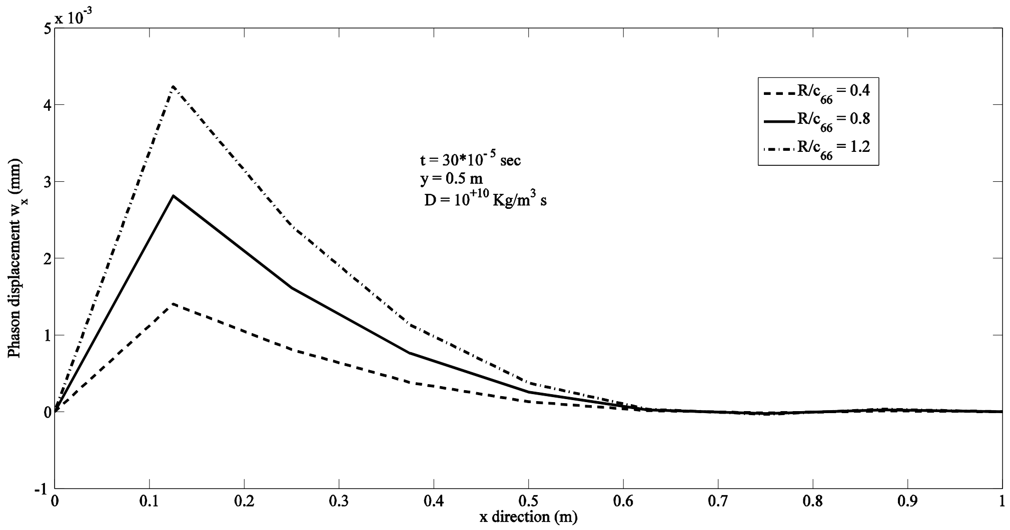
شکل ۱۱ توزیع تغییرمکان فنونی w_y درراستای y در زمان‌های مختلف



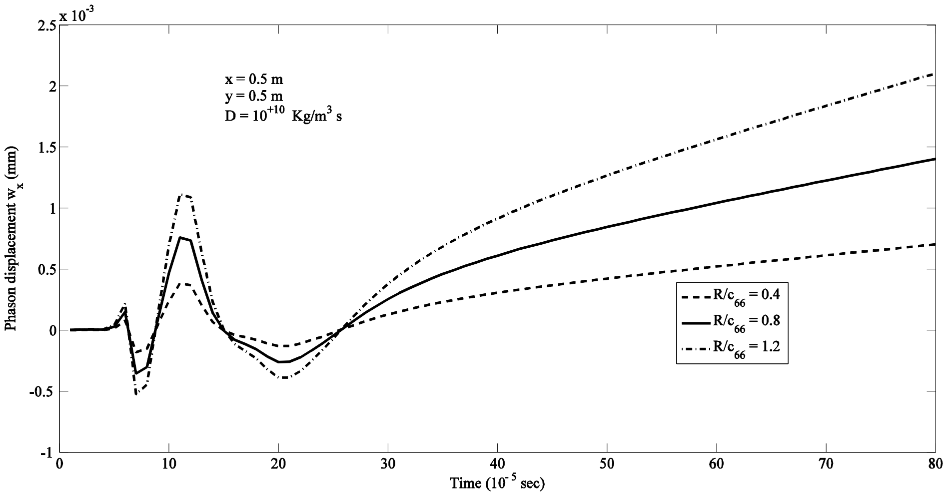
شکل ۱۲ تغییرات w_y نسبت به زمان در نقاط مختلفی برروی ناحیهٔ مفروض

یکی از پارامترهای بسیار اثرگذار بر رفتار دینامیکی حالت گذرای تغییرمکان‌های فیزنی، پارامتر R/c_{66} می‌باشد که به آن پارامتر کوپلینگ اطلاق می‌گردد. برای بررسی اثر این پارامتر برروی تغییرات و رفتار دینامیکی تغییرمکان فیزنی w_x، تغییرات این تغییرمکان درراستای x به‌ازای مقادیر مختلف R/c_{66} در شکل (۱۳) رسم شده‌است. همان‌گونه که در شکل (۱۳) مشخص است، میزان اثرپذیری w_x با افزایش مقدار پارامتر R/c_{66}، افزایش می‌یابد. به‌عبارت دیگر با افزایش مقدار R/c_{66}، مقادیر تغییرمکان فیزنی w_x نیز افزایش می‌یابند. این پدیده در شکل (١٤) که تغییرات w_x نسبت به زمان را نشان می‌دهد، نیز مشاهده می‌شود. رفتار مشابهی برای تغییرمکان فیزنی w_y نیز مشاهده می‌گردد که به‌منظور جلوگیری از افزایش حجم مقاله از ارائهٔ نمودارهای آن صرف‌نظر می‌گردد. به‌طور کلی، با افزایش R/c_{66} تغییرمکان فیزنی افزایش می‌یابد که بیانگر میزان تأثیر این پارامتر برروی رفتار دینامیکی تغییرمکان‌های فیزنی است.

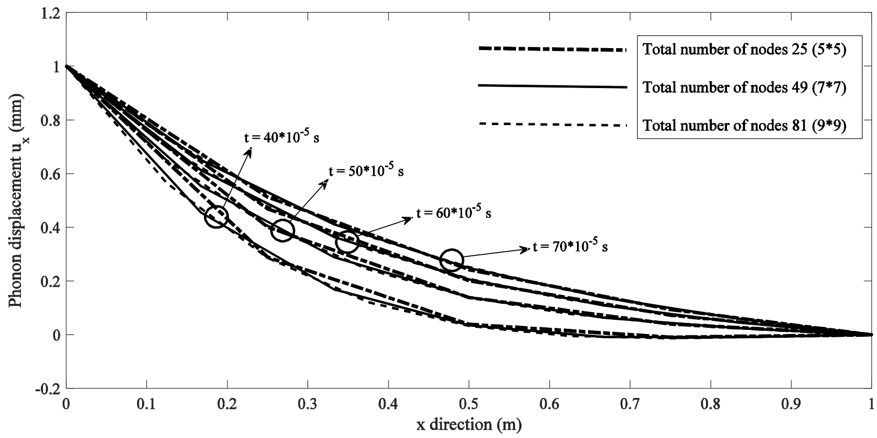
لازم به ذکر است که در کلیهٔ تحلیل‌های انجام‌شده، تعداد گره‌ها درراستای x و y با یکدیگر برابر هستند و تعداد آنها برابر ۹ در هر راستا می‌باشد و نیز به‌صورت منظم در هر دو راستا توزیع شده‌اند. با انتخاب تعداد گره‌های بیشتر از ۹ در هر راستا تغییر محسوسی در جواب‌های به‌دست‌آمده مشاهده نمی‌شود. در شکل (۱۵) نمودار توزیع تغییرمکان فنونی u_x درراستای x در زمان‌های مختلف و با تعداد گره‌های مختلف نشان داده شده‌است. با مشاهدهٔ شکل درمی‌یابیم که با افزایش تعداد گره‌ها تغییرات محسوسی حاصل نشده‌است به‌عنوان مثال بین نمودارهای با تعداد گره ۷ و ۹ در هر دو راستای x و y تفاوت زیادی وجود ندارد. لذا می‌توان نتیجه گرفت که تعداد گره ۹ در هر راستا برای مسئله مناسب می‌باشد.



شکل ۱۳ توزیع تغییرمکان فنونی w_x درراستای x به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر کوپلینگ



شکل ۱٤ تغییرات w_x نسبت به زمان به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر کوپلینگ



شکل ۱۵ توزیع تغییرمکان فنونی u_x درراستای x در زمان‌های مختلف و به‌ازای مقادیر مختلف تعداد گره‌ها

نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل دینامیکی حالت گذرای دوبعدی مواد شبه‌کریستال با ساختار دوجهی تحت بارگذاری به‌صورت شوک بااستفاده از روش بدون مش اختلاف محدود تعمیم‌یافته انجام شده‌است. معادلات حرکت حاکم بر مسئله براساس مدل الاستوهیدرودینامیک که برای مواد شبه‌کریستال ارائه شده‌است، انتخاب گردیده و حل شده‌اند. برای این منظور کلیهٔ روابط بااستفاده از تبدیل لاپلاس به محیط لاپلاس منتقل شده و پس‌از حل معادلات و به‌دست آوردن پاسخ‌ها بااستفاده از روش تالبوت، پاسخ‌های دینامیکی در حوزهٔ زمان به‌دست آمده‌اند. رفتار دینامیکی حالت گذرای تغییرمکان‌های فنونی و فیزنی در حالات مختلف بااستفاده از روش بدون مش اختلاف محدود تعمیم‌یافته حاصل شده‌است و در شرایط مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌است. همچنین تأثیر پارامترهایی از قبیل پارامتر کوپلینگ روی رفتار دینامیکی حالت گذرای تغییرمکان‌های فیزنی به‌دست آمده‌است. با بررسی نتایج به‌دست‌آمده در این پژوهش، مشخص می‌شود که روش بدون مش اختلاف محدود تعمیم‌یافته

روشی کارامد برای حل مسائل کوپل به‌خصوص حل معادلات حرکت حاکم بر مواد شبه‌کریستال به‌خصوص با ساختار ده‌وجهی می‌باشد. باتوجه به موارد مطرح‌شده در فوق، مهم‌ترین نتایج حاصل از این پژوهش را می‌توان به‌صورت زیر دسته‌بندی نمود:

- توسعهٔ کاربرد روش بدون مش اختلاف محدود تعمیم‌یافته برای حل مسائل دینامیکی حالت گذرا برای مواد شبه‌کریستال و استخراج معادلات حرکت کوپل شده به‌شکل گسسته براساس روش بدون مش مذکور.
- به‌دست آوردن پاسخ دینامیکی میدان‌های تغییرمکان فنونی و فیزنی تحت اثر بارگذاری به‌صورت شوک که بر میدان تغییرمکان فنونی اعمال شده‌است.
- بررسی اثر برهم‌کنش (کوپل) بین تغییرمکان‌های فنونی و فیزنی در تحلیل‌های دینامیکی حالت گذرا برای مواد شبه‌کریستال.
- به‌دست آوردن گسترش تغییرمکان فنونی در ماده بر اثر شوک مکانیکی اعمال‌شده که با سرعت محدود حرکت می‌کند.
- به‌دست آوردن طول مدت‌زمان ناحیهٔ حالت گذرا با استخراج تغییرات هر دو تغییرمکان فنونی و فیزنی نسبت به زمان.

مراجع

1. Shechtman, D., Blech, I., Gratias, D. and Cahn, J.W., "Metallic Phase with Long-range Orientational Order and No Translational Symmetry", *Phys. Rev. Lett.*, 53(20), pp. 1951-1953, (1984).
2. Fan, T.Y. and Mai, Y.W., "Elasticity Theory, Fracture Mechanics, and some Relevant Thermal Properties of Quasi – Crystalline Materials", *Appl. Mech. Rev.*, 57(5), pp. 325-343, (2004).
3. Shi, W., "Conservation Laws of a Decagonal Quasicrystal in Elastodynamics", *Eur. J. Mech. A Solids*, 24, pp. 217-226, (2005).
4. Fan, T.Y., "*Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and its Applications*", Science Press, Beijing and Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg.
5. Fan, T.Y., Wang, X.F., Li, W. and Zhu, A.Y., "Elasto-hydrodynamics of Quasicrystals", *Philos. Mag.*, 89(6), pp. 501-512, (2009).
6. Bak, P., "Phenomenological Theory of Icosahedral Incommensurate (Quasiperiodic) Order in Mn-Al alloys", *Phys. Rev. Lett.*, 54, pp. 1517-1519, (1985).
7. Rochal, S.B. and Lorman, V.L., "Anisotropy of Acoustic-phonon Properties of an Icosahedral Quasicrystal at High Temperature due to Phonon-phason Coupling", *Phy. Rev. B*, 62 (2), pp. 874-879, (2000).
8. Rochal, S.B. and Lorman, V.L., "Minimal Model of the Phonon-phason Dynamics in Icosahedral Quasicrystals and its Application to the Problem of Internal Friction in the J-AlPdMn alloy", *Phy. Rev. B*, 66, pp. 1442041-1442049, (2002).
9. Kozinkina, Y.A., Lorman, V.L. and Rochal, S.B., "Anisotropy of the Phonon-phason Dynamics and the Pinning Effect in Icosahedral AlPdMn Quasicrystals", *Phy. Solid State*, 45(7), pp. 1315-1321, (2003).
10. Wang, X.F. and Fan, T.Y., "Study on the Dynamics of the Double Cantilever-beam Specimen of Decagonal Al–Ni–Co Quasicrystals", *Appl. Math. Comput.*, 211(2), pp. 336–346, (2009).
11. Agiasofitou, E. and Lazar, M., "The Elastodynamic Model of Wave– Telegraph Type for Quasicrystals", *Int. J. Solids Struc.*, 51, pp. 923-929, (2014).

12. Wang, X. and Pan, E., "Analytical Solutions for some Defect Problems in 1D Hexagonal and 2D Octagonal Quasicrystals", *Pranama-J. Phy.*, 70, pp. 911-933, (2008).
13. Li, W. and Fan, T., "Exact Solutions of the Generalized Dugdale Model of Two-dimensional Decagonal Quasicrystals", *Appl. Math. Comput.*, 218(7), pp. 3068–3071, (2011).
14. Sladek, J., Sladek, V. and Pan, E., "Bending aAnalyses of 1D Orthorhombic Quasicrystal Plates", *Int. J. Solid. Struct.*, 50, pp. 3975-3983, (2013).
15. Sladek, J., Sladek, V., Krahulec, S., Zhang, Ch. and Wunsche, M., "Crack Analysis in Decagonal Quasicrystals by the MLPG", *Int. J. Fract.*, 181, pp. 115-126, (2013).
16. Li, L.H., "Complex Potential Theory for the Plane Elasticity Problem of Decagonal Quasicrystals and its Application", *Appl. Math. Comput.*, 219 (19), pp. 10105–10111, (2013).
17. Guo, J.-H., Yu, J. and Si, R., "A Semi-inverse Method of a Griffith Crack in One-dimensional Hexagonal Quasicrystals", *Appl. Math. Comput.*, 219(14), pp. 7445-7449, (2013).
18. Çerdik Yaslan, H., "Equations of Anisotropic Elastodynamics in 3D Quasicrystals as a Symmetric Hyperbolic System: Deriving the Time-dependent Fundamental Solutions", *Appl. Math. Model.*, 37(18-19), pp. 8409-8418, (2013).
19. Hosseini, S.M., Sladek, J. and Sladek, V., "Elastodynamic Analysis of a Hollow Cylinder with Decagonal Quasicrystal Properties: Meshless Implementation of Local Integral Equations", *Crystals*, 6 (2016), Paper no. 94.
20. Benito, J.J., Urena, F. and Gavete, L., "Influence of Several Factors in the Generalized Finite Difference Method", *Appl. Math. Model.* , 25, pp. 1039–1053, (2001).
21. Benito, J.J., Urena, F., Gavete, L. and Alvarez, R., "An H-adaptive Method in the Generalized Finite Differences", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 192, pp. 735–759, (2003).
22. Gavete, L., Gavete, M.L. and Benito, J.J., "Improvements of Generalized Finite Difference Method and Comparison with Other Meshless Method", *Appl. Math. Model.*, 27, pp. 831–847, (2003).
23. Benito, J.J., Urena, F. and Gavete, L., "Solving Parabolic and Hyperbolic Equations by the Generalized Finite Difference Method", *J. Comput. Appl. Math.*, 209, pp. 208–233, (2007).
24. Benito, J.J., Urena, F., Gavete, L., Salete, E. and Muelas, A., "A GFDM with PML for Seismic Wave Equations in Heterogeneous Media", *J. Comput. Appl. Math.*, 252, pp. 40–51, (2013).
25. Gavete, L., Urena, F., Benito, J.J. and Salete, E., "A Note on the Dynamic Analysis Using the Generalized Finite Difference Method", *J. Comput. Appl. Math.*, 252, pp. 132–147, (2013).
26. Hosseini, S.M., "Elastic Wave Propagation and Time History Analysis in Functionally Graded Nanocomposite Cylinders Reinforced by Carbon Nanotubes Using a Hybrid Mesh-free Method", *Eng. Comput* , 31(7), pp. 1261–1282, (2014).
27. Gu, Y., Wang, L., Chen, W., Zhang, C. and He, X., "Application of the Meshless Generalized Finite Difference Method to Inverse Heat Source Problems", *Eng. Anal. Bound. Elem. Method.*, 108, pp. 721-729, (2017).
28. Hosseini, S.M., "Application of a Hybrid Mesh-free Method for Shock-induced Thermoelastic Wave Propagation Analysis in a Layered Functionally Graded Thick Hollow Cylinder with Nonlinear Grading Patterns", *Eng. Anal. Bound. Elem. Method.*, 43, pp. 56–66, (2014).
29. Hosseini, S.M., "Shock-induced Two-dimensional Coupled Non-Fickian Diffusion-elasticity Analysis Using Meshless Generalized Finite Difference (GFD) Method", *Eng. Anal. Bound. Elem. Method*, 61, pp. 232-240, (2015).
30. Cohen, A.M., "*Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*", Springer-Verlag US, USA, (2007).
31. Bedford, A. and Drumheller, D.S., "Introduction to Elastic Wave Propagation", *John Wiley & Sons Ltd.*, Chichester, England (1994).